# Kompleksni brojevi

<u>Definicija</u> Kompleksnim brojem $z$ naziva se izraz oblika $z = a + bi$, gdje su $a$ i $b$ realni brojevi, a $i$ - imaginarna jedinica, kod koje je $i^2 = -1$.

Broj $a$ nazivamo realnim dijelom kompleksnog broja $z$ i označavamo ga sa $a = \operatorname{Re} z$, a broj $b$ nazivamo imaginarnim dijelom broja $z$ i označavamo ga sa $b = \operatorname{Im} z$.

Primijetimo da ako je $b = 0$ onda dobijemo kompleksne brojeve $a + 0 \cdot i = a$, koji su ~~jed~~ iz skupa realnih brojeva. Znači, realni brojevi su podskup skupa kompleksnih brojeva.

Kompleksni brojevi $z_1 = a_1 + b_1 i$ i $z_2 = a_2 + b_2 i$ su jednaki ($z_1 = z_2$) ako i samo ako su im realni i imaginarni dijelovi jednaki, odnosno ako je $a_1 = a_2$ i $b_1 = b_2$.

Za kompleksan broj $z = a + bi$ njemu suprotan kompleksan broj je $-z = -a - bi$ ($-z$ -je oznaka).

U skupu kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ uvodimo operacije sabiranja i množenja kompleksnih brojeva.

Zbir dva kompleksna broja $z_1 = a_1 + b_1 i$ i $z_2 = a_2 + b_2 i$ je kompleksan broj $z$, kod koga je:

$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i.$$

~~Pr~~ Svojstva sabiranja kompleksnih brojeva:

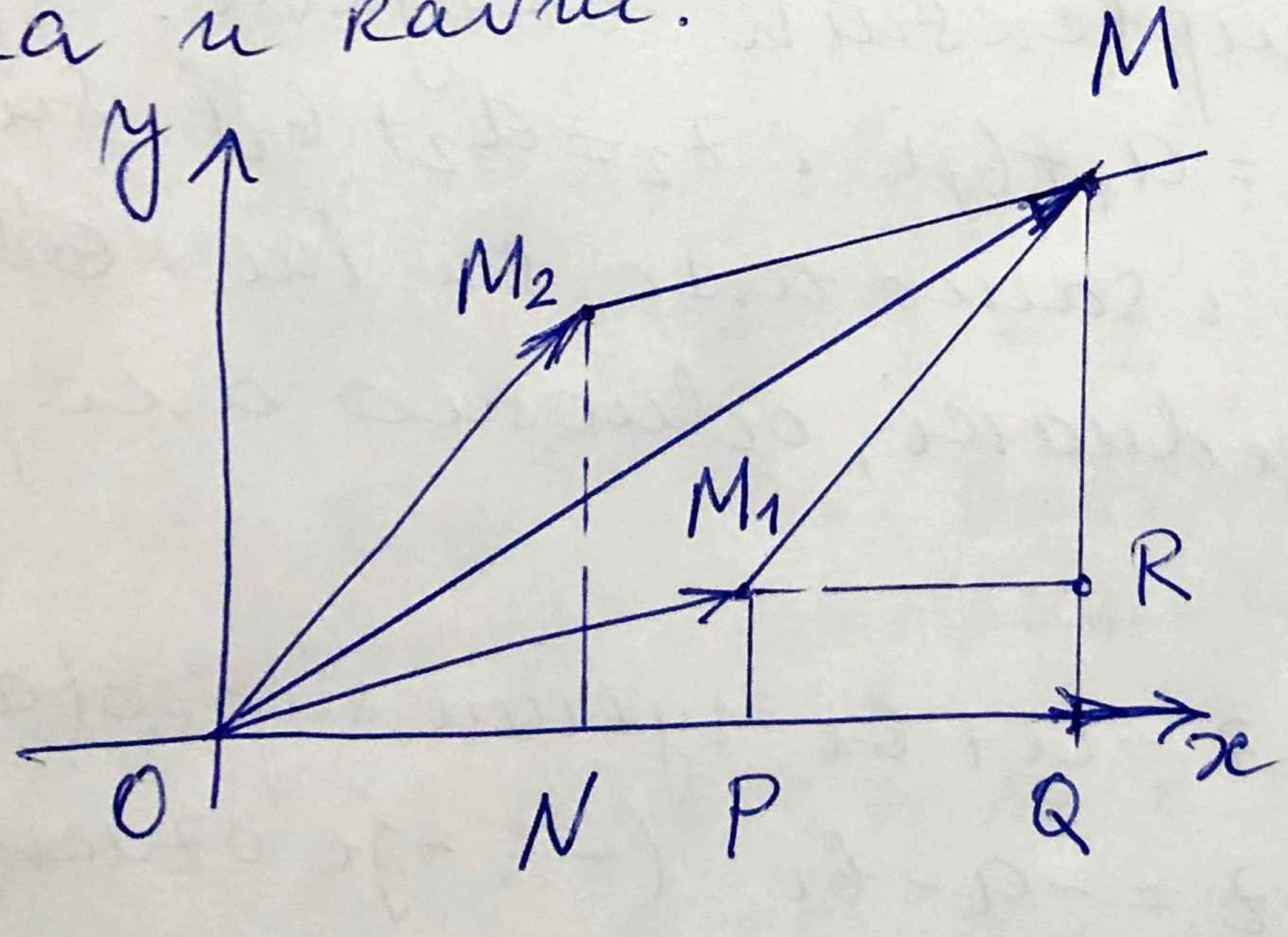
1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

2) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

3) $z + (-z) = (-z) + z = 0$

4) $z + 0 = 0 + z = z$

Svakom kompleksnom broju $z = a + bi$ odgovara jedna tačka $M(a,b)$ iz ravni i obratno, svakoj tački iz ravni $M(a,b)$ odgovara tačno jedan kompleksni broj $z = a + bi$.
Znamo da je tačkom $M(a,b)$ na jedinstven način određen radijus vektor $\vec{OM} = (a,b)$.
Stoga, možemo govoriti o bijektivnoj korespodenciji između kompleksnih brojeva i radijus vektora u ravni.




Neka su $\vec{OM_1}$ i $\vec{OM_2}$ radijus vektori koji odgovaraju kompleksnim brojevima $z_1 = a_1 + b_1 i$ i $z_2 = a_2 + b_2 i$.
$\vec{OM_1} = (a_1, b_1)$, a $\vec{OM_2} = (a_2, b_2)$
$\vec{OM} = (a,b)$

Iz podudarnosti trouglova $\Delta ONM_2$ i $\Delta M_1RM$ slijedi da je

$$a = \overline{OQ} = \overline{OP} + \overline{PQ} = \overline{OP} + \overline{M_1R} = \overline{OP} + \overline{ON} = a_1 + a_2$$

$$b = \overline{QM} = QR + \overline{RM} = \overline{OR} + \overline{NM_2} = b_1 + b_2$$

Znači, tačka $M(a,b)$ odgovara kompleksnom broju $z = z_1 + z_2 = a + bi$, odnosno zbiru kompleksnih brojeva odgovara radijus vektor jednak zbiru Radijus vektora, koji odgovaraju sabircima.

Proizvod kompleksnih brojeva $z_1 = a_1 + bi$ i $z_2 = a_2 + b_2 i$ je kompleksan broj kod koga je:

$$z = z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

Svojstva množenja kompleksnih brojeva

5) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

6) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$

7) $z_1 \cdot 1 = 1 \cdot z_1 = z_1$

Za svaki kompleksan broj $z = a + bi$ definišimo njemu recipročan kompleksan broj $\frac{1}{z}$ (oznaka) na sljedeći način $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$

Tada važi svojstvo:

8) $z \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot z = 1$

Takođe, važi distributivnost množenja u odnosu na sabiranje kompleksnih brojeva:

9) $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

Primjer Saberi i pomnoži kompleksne brojeve $z_1 = 3 - 4i$ i $z_2 = -1 + i$

Rješenje $z_1 + z_2 = (3 - 4i) + (-1 + i) = 2 - 3i$

$z_1 \cdot z_2 = (3 - 4i)(-1 + i) = -3 + 4i + 3i - 4i^2 = -3 + 4 + 7i =$

$= 1 + 7i$

Konjugovano kompleksan broj kompleksnom broju $z = a+bi$ je kompleksan broj $\bar{z} = a - bi$.
($\bar{z}$ je oznaka).

<u>Primjer</u> Naći konjugovano kompleksne brojeve za kompleksne brojeve:

a) $z_1 = 2 - 3i$
b) $z_2 = -5i$
c) $z_3 = 3$

<u>Rješenje</u>

a) $\bar{z}_1 = 2 + 3i$
b) $\bar{z}_2 = 5i$
c) $\bar{z}_3 = 3$

Važe sljedeća svojstva:

10) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$

11) $z \cdot \bar{z} = \operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z$

12) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

13) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

Postavlja se pitanje: Kako naći količnik dva kompleksna broja? To ćemo uraditi, takozvanim, metodom racionalizacije. Primijetimo da je proizvod kompleksnog broja i njemu konjugovanog kompleksnog broja uvijek realan broj ~~i to~~ koji je jednak $\operatorname{Re}^2 z + \operatorname{Im}^2 z$. Odavde,

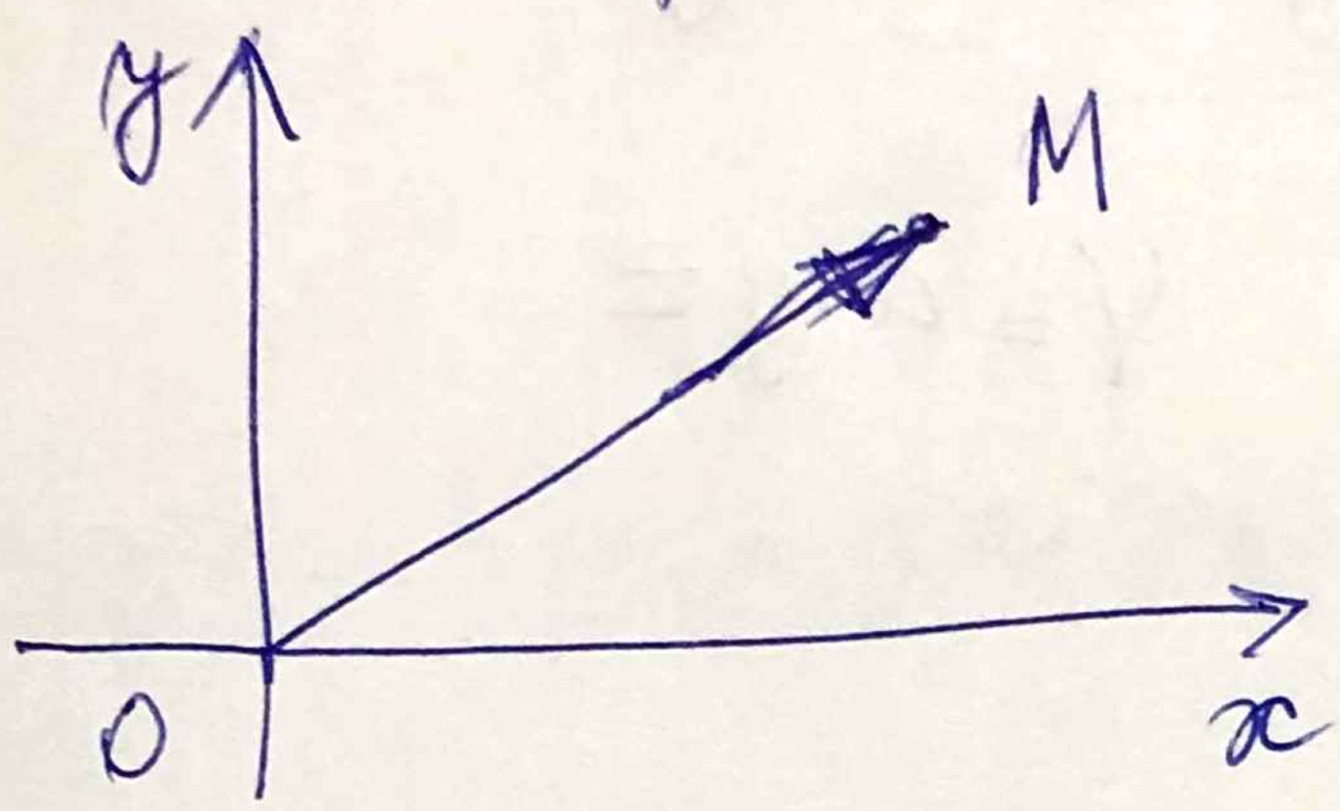
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{\operatorname{Re}^2 z_2 + \operatorname{Im}^2 z_2}$$

Ovime smo dijeljenje kompleksnih brojeva zaista sveli na množenje kompleksnih brojeva.

Jasno je da u skupu kompleksnih brojeva izraz $a^2+b^2$ se može napisati ~~kao~~ u obliku proizvoda dva kompleksna broja:

$$a^2+b^2=(a+bi)(a-bi).$$

## Modul kompleksnog broja




Dužina radijus vektora $\overrightarrow{OM}=(a,b)$ koji odgovara kompleksnom broju $z=a+bi$ je modul kompleksnog broja $z$ i označavamo ga sa $|z|$. Znači, $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Svojstva modula kompleksnih brojeva:

14) $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$

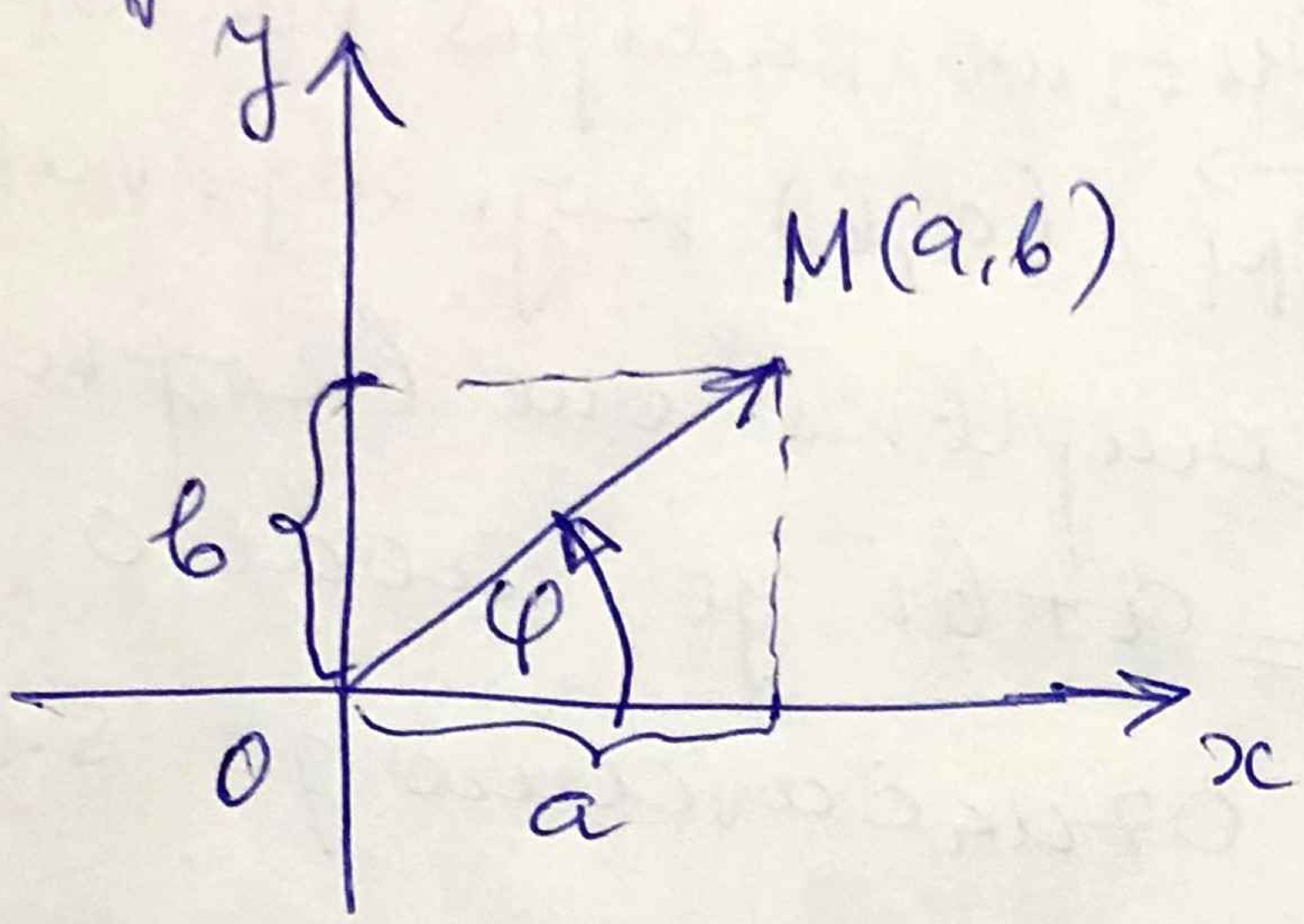
15) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

16) $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ nejednakost trougla

17) $|z_1|-|z_2|\leq|z_1-z_2|$.

# Trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Kompleksan broj $z = a + bi$ možemo predstaviti radijus vektorom $\vec{OM} = (a, b)$ u ravni.
Ugao koji radijus vektor $\vec{OM}$ zaklapa sa pozitivnim dijelom $x$-ose nazivamo argumentom kompleksnog broja $z$ i označavamo ga sa $\text{Arg}\, z$ ili $\varphi$




$\varphi = \arg z$

Argument kompleksnog broja $z = 0$ je nedefinisan.
Argument kompleksnog broja $z \neq 0$ je višeznačna veličina s tačnošću od $2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)
Odnosno $\text{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi$, gdje je $\arg z$ glavna vrijednost argumenta čija je vrijednost $0 \leq \arg z \leq 2\pi$, tj sa intervala $[0, 2\pi]$.
Pošto je $a = |\vec{OM}| \cos\varphi = |z| \cos\varphi$, a
$b = |\vec{OM}| \sin\varphi = |z| \sin\varphi$
imamo da je

$$\boxed{z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)}$$

Ovo je trigonometrijski oblik kompleksnog broja.

Jasno je da je $tg\varphi = \frac{b}{a}$. Odavde je

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{b}{a}, & a>0, b>0 \ (\text{I kv}) \\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + \pi, & a<0 \ (\text{II, III kv}) \\ \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + 2\pi, & a>0, b<0 \ (\text{IV kv}) \\ \frac{\pi}{2}, & a=0, b>0 \\ \frac{3\pi}{2}, & a=0, b<0 \end{cases}$$

Primjer Nađi trigonometrijski oblik kompleksnog broja:

a) $z = a \quad a>0$

b) $z = ki, \ k<0$

c) $z = 1+i$

d) $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$

Rješenje: a) $|z| = a \quad tg\varphi = 0, \ \varphi = 0$

$z = a = a(\cos 0 + i\sin 0)$

b) $|z| = -k, \ \varphi = \frac{3\pi}{2} \quad ki = -k\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

c) $z = 1+i, \ |z| = \sqrt{2}, \ tg\varphi = 1$ z se nalazi u I kv

Znači, $\varphi = \frac{\pi}{4} \quad 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

d) $|z| = 1, \ tg\varphi = \sqrt{3}$, z-se nalazi u III kvadrantu

znači $\varphi = \frac{4\pi}{3} \quad z = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$

# Množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku

Neka su dati kompleksni brojevi

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$
$$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

Tada je

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|\big(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 +$$
$$+ i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1)\big) =$$
$$= |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

Odnosno, $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

Odavde je
$$\arg z_1 \cdot z_2 = \begin{cases} \arg z_1 + \arg z_2, & \text{ako je } \arg z_1 + \arg z_2 < 2\pi \\ \arg z_1 + \arg z_2 - 2\pi, & \text{ako je } \arg z_1 + \arg z_2 \geq 2\pi \end{cases}$$

<u>Primjer</u> Nađi proizvod kompleksnih brojeva $z_1 = -3i$, $z_2 = 1-i$ u trigonometrijskom obliku.

<u>Rješenje</u>
$$z_1 = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{7\pi}{4}\right)\right) =$$
$$= 3\sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{4} + i\sin\frac{13\pi}{4}\right) =$$
$$= 3\sqrt{2}\cos\left(\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

Jasno je da za konačan broj činioca važi:

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = |z_1||z_2|\cdots|z_n|\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_n)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_n)\right) \quad (1)$$

gdje je $z_k = |z_k|(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$, $k=1,2,\dots,n$.

Kako se dijele kompleksni brojevi u trigonometrijskom obliku?

Pošto je $z \cdot \frac{1}{z} = 1$, a $\arg 1 = 0$, onda je na osnovu svojstava argumenta proizvoda:

$$\arg \frac{1}{z} = 2\pi - \varphi \, (= -\varphi).$$

Znači,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right).$$

<u>Primjer</u> Naći količnik sljedećih kompleksnih brojeva $z_1 = 6\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

<u>Rješenje</u> $\frac{z_1}{z_2} = 3\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right) =$

$$= 3\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$

## Stepenovanje kompleksnog broja

Iz gornje jednakosti (1), ukoliko je $z_k = z$, $k=1,2,\dots,n$ onda dobijamo:

$$\boxed{z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)}$$

gdje je $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Ova formula se naziva Moavrova formula

Ukoliko je $|z|=1$ imamo:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

Primjer Naći $z^5$ za $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

Rješenje $z^5 = 32\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

Za imaginarne jedinice važi:

$i^0 = 1,\ i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i.$

Odnosno, $i^{4k} = 1,\ i^{4k+1} = i,\ i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i.$

## Korjenovanje kompleksnih brojeva

Definicija Pod $n$-tim korijenom, $n \in \mathbb{N}$, kompleksnog broja $z$ podrazumijevamo kompleksan broj, koji ćemo označavati sa $\sqrt[n]{z}$, takav da je

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = z.$$

Neka je $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ i neka je

$$\sqrt[n]{z} = w = |w|(\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Tada mora biti (po Moavrovoj formuli):

$$|w|^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Odavde slijedi da je

$$|w|^n = |z| \quad i \quad n\alpha = \varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Odnosno, $\alpha = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$ i $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ (aritmetički korijen)

Znači, svi kompleksni brojevi, koji su n-ti korijeni kompleksnog broja z su oblika

$$\boxed{z_k = \sqrt[n]{|z|} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1}$$

Dobijamo n-različitih vrijednosti za korijen. Za druge vrijednosti k, zbog periodičnosti funkcija sinus i kosinus, dobijamo vrijednosti za korijen koje su jednake već nađenim.

Na primjer, za $k = n$ imamo

$$z_n = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2n\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2n\pi}{n}\right) =$$

$$= \sqrt[n]{|z|} \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\right)\right) =$$

$$= \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n}\right) = z_0$$

Znači, za svaki kompleksan broj $z \neq 0$ n-ti korijen ima tačno n-različitih vrijednosti.

<u>Primjer</u> Izračunati $\sqrt[4]{z}$, ako je $z = 1 + i$.

<u>Rješenje</u> $|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg} \varphi = 1$, z je iz I kvadranta, znači $\varphi = \frac{\pi}{4} = \arg z$.

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

Tada je

$$\sqrt[4]{z} = z_k = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)$$

$k = 0, 1, 2, 3$

Odavde je

$$z_0 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right)$$

$$z_1 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}\right)$$

$$z_3 = \sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}\right).$$